ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

oOo

**NGUYỄN TRUNG KIÊN**

# PHÂN BỐ GIÁ TRỊ ĐỐI VỚI CÁC L-hàm THUỘC LỚP SELBERG

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2020**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

—————o0o—————

**NGUYỄN TRUNG KIÊN**

# PHÂN BỐ GIÁ TRỊ ĐỐI VỚI CÁC L-hàm THUỘC LỚP SELBERG

**Chuyên ngành: Giải Tích**
**Mã số: 8 46 01 02**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học
**GS.TSKH. Hà Huy Khoái**

**THÁI NGUYÊN - 2020**

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **GS. TSKH. Hà Huy Khoái**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

*Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2020*

*Tác giả*

**Nguyễn Trung Kiên**

**Xác nhận**
**của khoa chuyên môn**

**Xác nhận**
**của người hướng dẫn**

**GS.TSKH. Hà Huy Khoái**

# Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, **GS.TSKH. Hà Huy Khoái**.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

*Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2020*

*Tác giả*

**Nguyễn Trung Kiên**

# Mục lục

# Lời mở đầu

**1. Lý do chọn đề tài**

Các L-hàm luôn luôn là vấn đề trọng tâm của lý thuyết số và giải tích toán học. Trong các L-hàm thì các L-hàm thuộc lớp Selberg đóng vai trò hết sức quan trọng, vì nó chứa những hàm nổi tiếng của toán học như zeta hàm Riemann, L-hàm của các dạng modular.

**2. Nội dung đề tài**

Luận văn có mục tiêu trình bày một số kết quả gần đây trong hướng nghiên cứu phân bố giá trị của các L-hàm thuộc lớp Selberg và ứng dụng, cụ thể là:

- Sự xác định của L-hàm qua nghịch ảnh của một điểm, tính cả bội;
- Sự xác định của L-hàm qua nghịch ảnh một tập hợp, tính cả bội;
- Sự xác định của L-hàm qua nghịch ảnh một tập hợp, không tính bội;
- Những điều kiện để L-hàm trùng với hàm zeta Riemann.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: *Phân bố giá trị đối với các L-hàm*

Chương 2: *Phân bố giá trị đối với các L-hàm thuộc lớp Selberg.*

# Chương 1

# Phân bố giá trị đối với các L-hàm

## 1.1 Hàm zeta Riemann

Hàm zeta Riemann là một hàm đặc biệt quan trọng của toán học và vật lý, xuất hiện trong tích phân xác định và có liên quan mật thiết đến các kết quả xung quanh định lý số nguyên tố. Hàm zeta Riemann là hàm của một biến phức $s$, là tổng của một chuỗi Dirichlet.

Các L-hàm là chuỗi Dirichlet, mà hàm zeta Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ là một ví dụ, là những đối tượng quan trọng trong lý thuyết số và đã được nghiên cứu rộng rãi. L-hàm là chuỗi Dirichlet

$$\mathcal{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

của một biến phức $s = \sigma + it$, thỏa mãn các tiên đề sau:

**(i)** Giả thiết Ramanujan: $a(n) \ll n^{\varepsilon}$ với mọi $\varepsilon > 0$;

**(ii)** Thác triển giải tích: Có một số nguyên không âm $k$ sao cho $(s-1)^k \mathcal{L}(s)$ là hàm nguyên có bậc hữu hạn.

**(iii)** Phương trình hàm: $\mathcal{L}$ thỏa mãn phương trình hàm dạng

$$\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \omega \overline{\Lambda_{\mathcal{L}}(1-\bar{s})},$$

trong đó

$$\Lambda_{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}(s)Q^s \prod_{j=1}^{K} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$$

với $Q, \lambda_j$, là số thực dương và các số phức $\mu_j, \omega$ với $\mathrm{Re}\mu_j \geq 0$ và $|\omega| = 1$.

Bậc $d_{\mathcal{L}}$ của L-hàm $\mathcal{L}$ được xác định bởi $d_{\mathcal{L}} = 2\sum_{j=1}^{K} \lambda_j$, trong đó $K, \lambda_j$ là những số thỏa mãn (iii).

L-hàm thỏa mãn (i)-(ii) và đồng thời thoả mãn giả thiết tích Euler được gọi là L-hàm lớp Selberg $S$. Ta sẽ chỉ ra một $L$- hàm $\mathcal{L}$ thỏa mãn (i)-(iii) xác định duy nhất bởi các không điểm của $\mathcal{L} - c$ với hai số phức $c$ phân biệt. Kết quả thu được áp dụng cho lớp Selberg.

Từ (ii) L-hàm có thể được thác triển thành hàm phân hình trong mặt phẳng phức $\mathbf{C}$. Tập hợp không điểm của hàm phân hình $f$, tập hợp không điểm $f^{-1}(c) := \{s \in \mathbf{C} : f(c) = c\}$ của $f - c$ với $c$ là giá trị phức, nghĩa là tập hợp các nghịch ảnh của $c$ bởi $f$, hay là giá trị $c$ của $f$ là đối tượng chính của lý thuyết phân phối giá trị các hàm phân hình. Sau đây là một định lý nổi tiếng của Nevanlinna, thường được gọi là định lý duy nhất (hoặc duy nhất Nevanlinna): hai hàm phân hình $f, g$ trong $\mathbf{C}$ bằng nhau nếu $f^{-1}(c_j) = g^{-1}(c_j)$, tức là $f - c_j$ và $g - c_j$ có chung các không điểm (không kể bội) với năm giá trị phân biệt $c_j \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Với các L-hàm, ta có kết quả tốt hơn. Cụ thể, hai $L$- hàm trong lớp Selberg phải bằng nhau nếu chúng có cùng không điểm kể cả bội. Hai L-hàm (không nhất thiết phải thuộc lớp Selberg) với $a(1) = 1$ bằng nhau nếu $\mathcal{L}_1 - c$ và $\mathcal{L}_2 - c$ có cùng không điểm kể cả bội, trong đó $c$ là số phức. Khi bỏ qua bội, vấn đề trở nên tinh tế hơn. Ví dụ $\zeta$ và $\zeta^2$, có cùng không điểm (không kể bội), cho thấy kết quả trên không còn đúng khi bỏ qua bội.

## 1.2 Phân bố giá trị các L-hàm

**Định lý 1.1.** [[2], *Theorem A*] *Nếu hai L-hàm $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ thỏa mãn cùng phương trình hàm với $a(1) = 1$ và $\mathcal{L}_1^{-1}(c_j) = \mathcal{L}_2^{-1}(c_j)$ với hai số phức khác nhau $c_1$ và $c_2$*

*sao cho*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{\tilde{N}^{c_1}_{\mathcal{L}_j}(T) + \tilde{N}^{c_2}_{\mathcal{L}_j}(T)}{N^{c_1}_{\mathcal{L}_j}(T) + N^{c_2}_{\mathcal{L}_j}(T)} > \frac{1}{2} + \epsilon$$

*trong đó* $\epsilon$ *là số dương bất kỳ,* $j = 1, 2$ *thì* $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2$.

Ở trên, $N^c_{\mathcal{L}}(T)$ biểu thị số không điểm của $\mathcal{L}(\sigma + it) - c$ trong hình chữ nhất $0 \le \sigma \le 1, |t| \le T$ (kể cả bội) và $\tilde{N}^c_{\mathcal{L}}(T)$ số các không điểm như vậy, không kể cả bội.

**Định lý 1.2.** [[2], *Theorem* 1] *Nếu hai L-hàm* $\mathcal{L}_1$ *và* $\mathcal{L}_2$ *thỏa mãn cùng phương trình hàm với* $a(1) = 1$ *và* $\mathcal{L}_1^{-1}(c_j) = \mathcal{L}_2^{-1}(c_j)$ *cho hai số phức khác nhau* $c_1$ *và* $c_2$ *thì* $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2$.

Ta sử dụng lý thuyết Nevanlinna cùng với công cụ giải tích khác trong chứng minh Định lý 1.2, bằng cách phân tích cấp tăng và phân bố các không điểm của hàm. Do L-hàm là hàm phân hình và lý thuyết Nevanlinna được coi là công cụ quan trọng trong nghiên cứu hàm phân hình, ta sẽ chỉ ra các ứng dụng tiếp theo của lý thuyết Nevanlinna trong lý thuyết về các L-hàm.

Cho $f$ là hàm phân hình trong $\mathbf{C}$. Khi đó, đặc trưng Nevanlinna $T(r, f)$ được định nghĩa như sau

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f),$$

trong đó

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta;\ \log^+ |x| = \max(0, log|x|),$$

và

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r,$$

trong đó $n(t, f)$ là số cực của $f$ (kể cả bội) trong $|s| < t$. Nhắc lại kết quả sau:

**(i)** Các tính chất của $T(r, f)$ và $m(r, f)$:

$$T(r, fg) \le T(r, f) + T(r, g),\ T(r, f + g) \le T(r, f) + T(r, g) + O(1).$$

Các bất đẳng thức tương tự vẫn đúng với $m(r, f)$.

**(ii)** $\log \max_{|s|=r}\{|f(s)|\} \leq \frac{R+r}{R-r}\, T(R,f)$ với $R > r > 0$ nếu $f$ là hàm nguyên.

**(iii)** Định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna: $T(r,f) = T(r,\frac{1}{f}) + O(1)$.

**(iv)** Bổ đề đạo hàm logarit: $m(r,\frac{f'}{f}) = O(\log r)$ nếu giả thiết

$$\rho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

của $f$ là hữu hạn.

*Chứng minh.* Ta chứng minh Định lý 1.1.

Trường hợp 1: Một trong hai hàm $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ là hằng số, giả sử $\mathcal{L}_1$ là hàm hằng. Khi đó $\mathcal{L}_1 = 1$ từ giả thiết $a(1) = 1$. Do $\mathcal{L}_2 - c_j$ và $\mathcal{L}_1 - c_j$ có cùng không điểm, nên dễ thấy $\mathcal{L}_2 \equiv 1$ (trong đó $c_1$ hoặc $c_2$ bằng 1), hoặc $\mathcal{L}_1 \neq c_1, c_2$ trong $\mathbf{C}$ (trong đó $c_1, c_2 \neq 1$).

Trường hợp 2: Lưu ý L-hàm có nhiều nhất một cực điểm, $\mathcal{L}_2$ phải là hàm hằng và do đó $\mathcal{L}_2 \equiv 1$ vì $a(1) = 1$, theo Định lý Picard cổ điển nói rằng một hàm phân hình siêu việt trong $\mathbf{C}$ nhận mỗi giá trị trong $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ vô hạn lần, với nhiều nhất hai trường hợp ngoại lệ (các L-hàm siêu việt nhận mọi số phức, theo công thức Riemann-von Mangoldt được đề cập bên dưới). Do đó, $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2 (\equiv 1)$.

Do đó, giả sử $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ không là hàm hằng. Giả sử ngược lại $\mathcal{L}_1 \not\equiv \mathcal{L}_2$,ta cần dẫn đến mâu thuẫn. Để thuận lợi, ta xét các hàm bổ trợ sau

$$F(s) = \frac{(s-1)^q \mathcal{L}_1' \mathcal{L}_2' (\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)^2}{(\mathcal{L}_1 - c_1)(\mathcal{L}_1 - c_2)(\mathcal{L}_2 - c_1)(\mathcal{L}_2 - c_2)}, \tag{1.1}$$

trong đó $q$ là số nguyên sao cho $F$ không có cực điểm hoặc không điểm tại $s = 1$. Rõ ràng, $F$ không bằng không theo các giả thiết trên. Chứng minh dưới đây chỉ ra $F$ bằng không, và ta có mâu thuẫn.

Ta thấy $F$ là hàm nguyên. Thực vậy, hai hàm $\mathcal{L}_1$ và $\mathcal{L}_2$ chỉ có một cực điểm tại $s = 1$, không thể là cực điểm của $F$, (xét hệ số của $(s-1)^q$. Do đó, các cực điểm có thể có của $F$ chỉ có thể từ các không điểm của $\mathcal{L}_1 - c_j$ hoặc $\mathcal{L}_2 - c_j$, $j = 1, 2$.